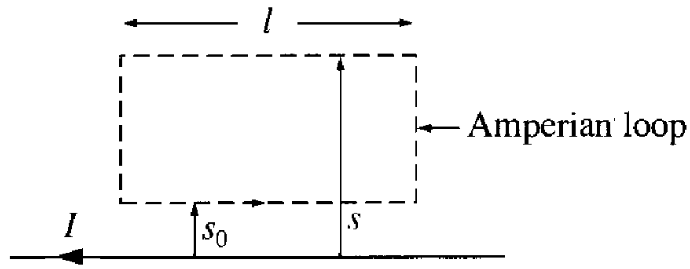
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 20

Problema 1. Una espira en forma de rectángulo de largo L, y un alambre recto paralelo a uno de los lados de la espira que lleva una corriente I, yacen sobre un plano. La distancia entre el alambre y el lado más cercano de la espira es s_0. Determine el flujo magnético que atraviesa la espira. Suponga que la corriente es una función del tiempo con $I_{(t)} = a + bt$, con a y b constantes positivas ¿Cuál es la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida en la espira y la dirección de la corriente inducida?



Primero calculemos por Ley de Ampere el campo magnético producido por el alambre con corriente, considerando que esta corriente fluye en dirección z

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = 2\pi B r \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

En el plano de la espira tenemos que $\hat{\theta}$ y $\hat{\jmath}$ son paralelos y r es x. Entonces, considerando el vector normal a la superficie en dirección $\hat{\jmath}$, el flujo sobre la espira es

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{s_0}^{s} \int_0^L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} \cdot \hat{\jmath}\, dz\, dx = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \int_{s_0}^{s} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

La fuerza electromotriz inducida sobre la espira debida a la variación de campo magnético se obtiene de la ley de Faraday

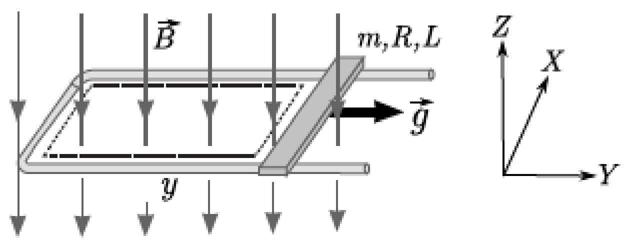
$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

La f.e.m. para esta variación de corriente es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{\mu_0 I L}{2\pi}\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) = -\frac{d}{dt}\frac{\mu_0 L(a+bt)}{2\pi}\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) = -\frac{\mu_0 L b}{2\pi}\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

La dirección de la corriente inducida la determina la ley de Lenz, que expone que la corriente inducida en la espira producirá un campo magnético que se opondrá a la variación del campo magnético producido el alambre. Como $\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 Lb}{2\pi} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$ es positiva, el campo magnético está creciendo en $\hat{\jmath}$, por lo que el campo magnético producido por la espira debe ir en dirección $-\hat{\jmath}$. Usando la regla de la mano derecha vemos que la corriente inducida en la espira va en dirección antihorario según el diagrama del enunciado.

Problema 2. Una barra conductora de resistencia R se puede deslizar por una horquilla de resistencia despreciable, fija en el espacio como se indica en la figura. El plano de la horquilla es atravesado por un campo magnético uniforme y constante de magnitud B. La barra y la horquilla constituyen un circuito cerrado. Si la barra tiene masa m, calcule la velocidad con que esta cae (en el campo gravitatorio) si parte del reposo. Desprecie el efecto del roce y la autoinducción.



Primero calculemos el flujo magnético sobre la espira considerando una dirección normal a la superficie como $\hat{k}$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^L \int_0^y -B\hat{k} \cdot \hat{k}\, dy'\, dx = -BLy$$

Calculemos la fem por la ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BL\frac{dy}{dt} = BLv$$

Por la ley de Ohm ($V = IR$) podemos encontrar la corriente que fluye por la barra (considerando a la fem como el análogo a una diferencia de potencial (voltaje))

$$\varepsilon = IR \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$

De la ley de Lenz obtenemos que la corriente sobre la barra fluye en dirección $\hat{\imath}$

Ahora que tenemos corriente podemos calcular la fuerza magnética que ejerce el campo magnético sobre la barra con corriente. Entonces integramos sobre la barra en dirección de la corriente

$$\vec{F}_m = -\int \vec{B} \times I\, d\vec{l} = -\int_0^L -B\hat{k} \times \frac{BLv}{R}\hat{\imath}\, dx = -\frac{B^2L^2v}{R}\hat{\jmath}$$

Además de fuerza magnética, tenemos fuerza gravitacional. Entonces usando la segunda ley de Newton obtenemos ecuaciones de movimiento

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_m + \vec{F}_g = -\frac{B^2L^2v}{R}\hat{\jmath} + mg\hat{\jmath} = \left(mg - \frac{B^2L^2v}{R}\right)\hat{\jmath}$$

Solo tenemos una componente y obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2L^2v}{R}$$

Usamos el método separación de variables e integramos (C constante de integración)

$$\frac{dv}{g - \frac{B^2L^2v}{mR}} = dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{mR}{B^2L^2}\ln\left(g - \frac{B^2L^2v}{mR}\right) = t + C$$

Despejando y tomando la exponencial

$$g - \frac{B^2L^2v}{mR} = Ce^{-\frac{B^2L^2}{R}t} \quad \Rightarrow \quad v_{(t)} = Ce^{-\frac{B^2L^2}{R}t} + \frac{mgR}{B^2L^2}$$

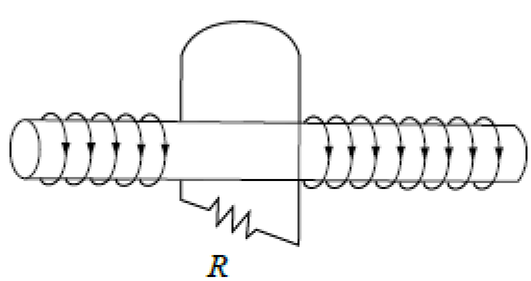
Aplicamos condiciones iniciales para determinar la constante

$$v_{(0)} = C + \frac{mgR}{B^2L^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{mgR}{B^2L^2}$$

Finalmente

$$v_{(t)} = -\frac{mgR}{B^2L^2}e^{-\frac{B^2L^2}{R}t} + \frac{mgR}{B^2L^2} = \frac{mgR}{B^2L^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2L^2}{R}t}\right)$$

Problema 3. Por un solenoide muy largo de radio a y n vueltas por unidad de largo, circula una corriente dependiente del tiempo $I_{(t)}$. Un circuito de resistencia R envuelve al solenoide como se muestra en la figura. Si la corriente en el solenoide está aumentando a una tasa constante $\frac{dI}{dt} = k$, encuentre la f.e.m. y la corriente inducida en el circuito.



Primero calculemos el flujo magnético sobre la superficie de la espira, considerando que dentro de un solenoide muy largo el campo magnético es $\mu_0 In$ y fuera del solenoide es 0

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^a \int_0^{2\pi} B\hat{k} \cdot \hat{k} r \, d\theta \, dr = \pi a^2 B = \mu_0 I \pi a^2 n$$

La fem inducida es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 \pi a^2 n \frac{dI}{dt} = -\mu_0 \pi a^2 nk$$

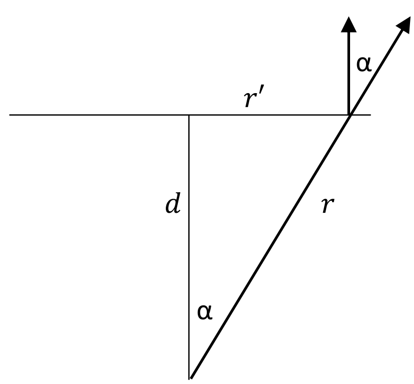
Por la ley de Ohm podemos calcular la corriente

$$\varepsilon = IR \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 \pi a^2 nk}{R}$$

Problema 4. Considere un monopolo magnético (este objeto produciría un campo magnético tipo coulombiano) que se mueve por el eje de simetría de un loop conductor circular de radio R, y cruza a velocidad constante v este loop. Calcule el flujo magnético a través del loop y represente gráficamente el flujo y el voltaje inducido como función del tiempo. Comente. Esta sería una forma de detectar un eventual monopolos magnético, el efecto sería muy notorio si usa como loop una espira superconductora.

El campo magnético que produciría un monopolo magnético es (análogo al campo eléctrico producido por una carga puntual $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r}\hat{r}$$



Vista lateral del loop

Entonces el flujo magnético sobre el loop es

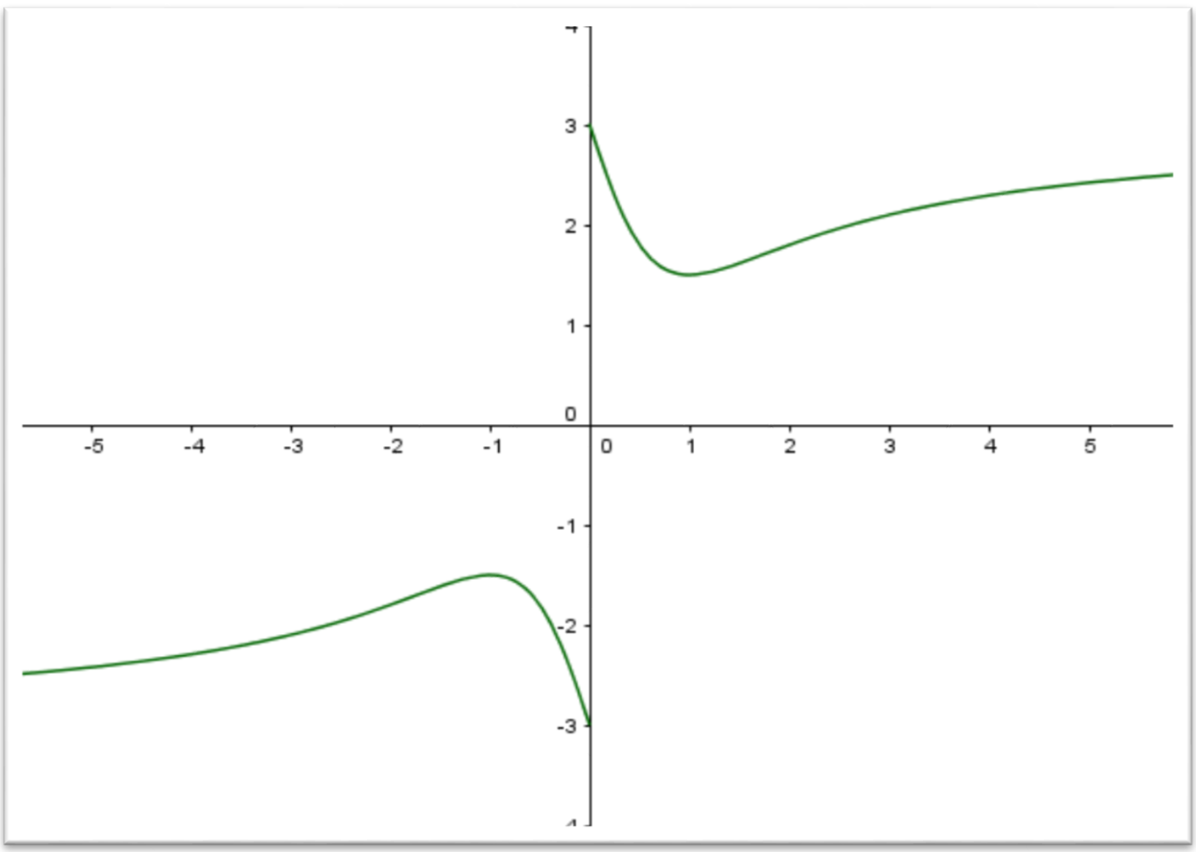
$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r} \cdot r' \hat{k}\, d\theta\, dr'$$

De la figura y por Pitágoras tenemos que $r^2 = d^2 + r'^2$ y $\hat{r} \cdot \hat{k} = \cos(\alpha) = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{d^2+r'^2}}$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 q_m d}{2} \int_0^R \frac{r'}{(d^2 + r'^2)^{3/2}} dr'$$

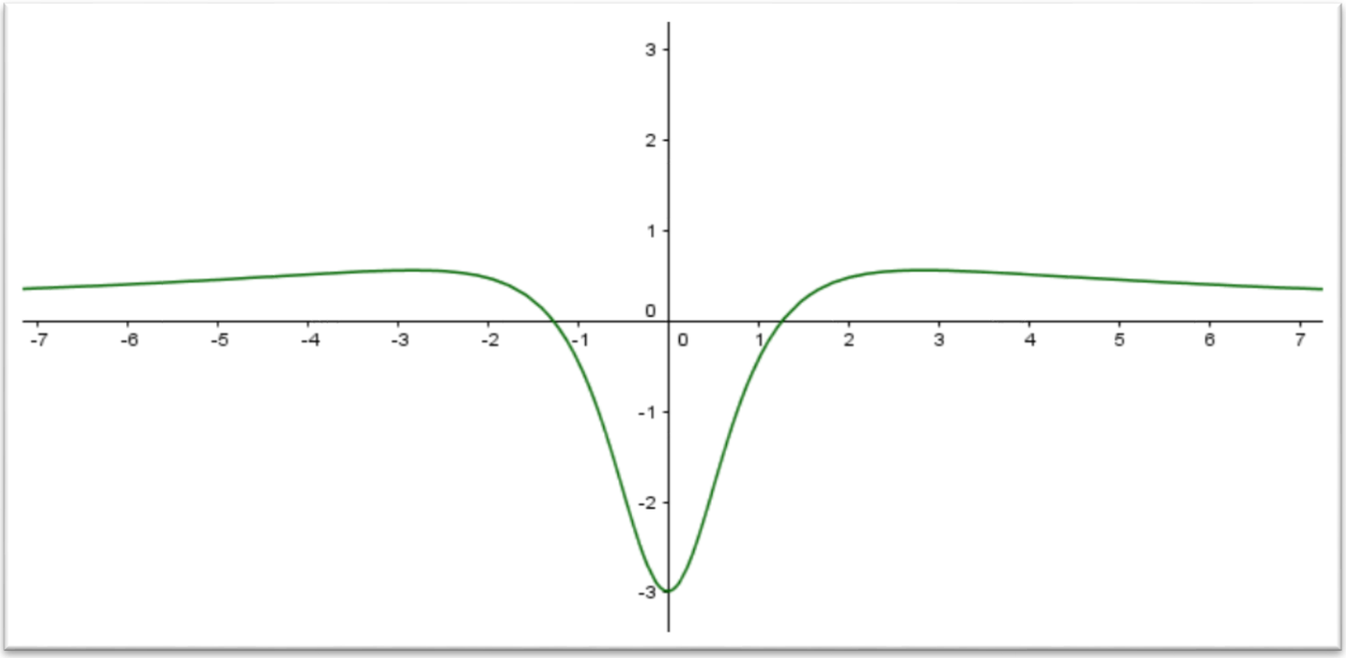
Hacemos un cambio de variable $u = d^2 + r'^2$, $du = 2r'\, dr'$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 q_m d}{4} \int_{d^2}^{d^2+R^2} \frac{1}{u^{3/2}} du = -\frac{\mu_0 q_m d}{2} u^{-1/2} \Big|_{d^2}^{d^2+R^2} = -\frac{\mu_0 q_m d}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}} - \frac{1}{|d|} \right)$$
$$= \frac{\mu_0 q_m}{2} \left(sgn(d) - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} \right)$$



El voltaje inducido lo obtenemos por ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 q_m v}{2} \left(\delta_{(d)} - \frac{1}{\sqrt{d^2+R^2}} + \frac{d^2}{(d^2+R^2)^{3/2}} \right)$$



3
2
1
0
-1
-2
-3
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7